language: Croatian

4. Srednjoeuropska matematička olimpijada

POJEDINAČNO NATJECANJE
11. RUJNA 2010.

Zadatak I-1.
Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Zadatak I-2.
Na ploči su napisani svi pozitivni djelitelji prirodnog broja N. Igrači A i B igraju igru u kojoj naizmjence brišu po jedan broj s ploče. U prvom potezu, igrač A briše broj N. Ako je prethodni obrisani broj d, onda sljedeći igrač briše ili jedan djelitelj broja d ili jedan višekratnik broja d. Gubi onaj igrač koji više ne može odigrati potez. Odredi sve brojeve N za koje igrač A može pobijediti neovisno od poteza igrača B.

Zadatak I-3.
Dan je tetivni četverokut $ABCD$ s točkom E na dijagonali $\overline{AC}$ pri čemu vrijedi $|AD| = |AE|$ i $|CB| = |CE|$. Neka je M središte opisane kružnice k trokuta BDE. Kružnica k siječe pravac AC u točkama E i F. Dokaži da se pravci FM, AD i BC sijeku u jednoj točki.

Zadatak I-4.
Odredi sve prirodne brojeve n koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(i) n ima barem četiri različita pozitivna djelitelja;

(ii) za bilo koje djelitelje a i b broja n koji zadovoljavaju $1 < a < b < n$, broj $b - a$ dijeli n.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za postavljanje pitanja: 45 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.