



4th Middle European Mathematical Olympiad

SOUTĚŽ JEDNOTLIVCŮ
11. ZÁŘÍ 2010

Úloha I-1.

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

Úloha I-2.

Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla N . Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají na tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N . Bylo-li naposled smazáno číslo d , v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d . Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N , pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B .

Úloha I-3.

Je dán tětiový čtyřúhelník $ABCD$ a bod E na jeho úhlopříčce AC takový, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nechť M je středem kružnice k opsané trojúhelníku BDE . Kružnice k protíná přímku AC v bodech E a F . Dokažte, že přímky FM , AD a BC procházejí týmž bodem.

Úloha I-4.

Nalezněte všechna kladná celá čísla n , která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:

- (i) číslo n má alespoň čtyři různé kladné dělitele,
- (ii) pro libovolné dva dělitele a, b čísla n takové, že $1 < a < b < n$, dělí jejich rozdíl $b - a$ číslo n .

Čas: 5 hodin.

Čas na dotazy: 45 min.

Za každou úlohu lze získat 8 bodů.

Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.