language: German

4. Mitteleuropäische Mathematikolympiade

Einzelwettbewerb
11. September 2010

Aufgabe I-1.
Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y) \; .$$

Aufgabe I-2.
Alle positiven Teiler einer positiven ganzen Zahl N stehen an einer Tafel. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd ziehen. Im ersten Zug löscht Spieler A die Zahl N. Wenn die zuletzt gelöschte Zahl d war, dann löscht der nächste Spieler entweder einen Teiler oder ein Vielfaches von d. Der Spieler, der keinen Zug mehr machen kann, verliert. Man bestimme alle Zahlen N, für die der Spieler A immer gewinnen kann, unabhängig davon, wie B zieht.

Aufgabe I-3.
Gegeben sei ein Sehnenviereck $ABCD$ mit einem Punkt E auf der Diagonalen AC, sodass $\overline{AD} = \overline{AE}$ und $\overline{CB} = \overline{CE}$. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks BDE. Der Kreis k schneide die Gerade AC in E und F.
Man zeige, dass die Geraden FM, AD und BC einander in einem Punkt schneiden.

Aufgabe I-4.
Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(a) n hat mindestens vier verschiedene positive Teiler.

(b) Für alle Teiler a und b von n mit $1 < a < b < n$ teilt die Zahl $b - a$ ebenfalls n.

Arbeitszeit: 5 Stunden
Fragezeit: 45 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von ihrem Schwierigkeitsgrad ab.