



4th Middle European Mathematical Olympiad

EGYÉNI VERSENY
2010. SZEPTEMBER 11.

I-1. feladat

Adjuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

I-2. feladat

Egy N pozitív egész összes pozitív osztóját felírjuk egy táblára. Két játékos, A és B , felváltva lépnek a következő játékban. Az első lépésben A letörli N -et. Ha az utoljára letörölt szám d volt, akkor a soron következő játékos vagy d egy osztóját, vagy d egy többszörösét törölheti le. Az a játékos veszít, aki nem tud többet lépni. Határozzuk meg az összes olyan N -et, amelyre A meg tudja nyerni a fenti játékot B lépéseitől függetlenül.

I-3. feladat

Adott egy $ABCD$ húrnégyszög és egy E pont az AC átlón úgy, hogy $AD = AE$ és $CB = CE$. Legyen k a BDE háromszög körülírt köre, és M jelölje k középpontját. A k kör az AC egyenest E és F pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az FM , AD és BC egyenesek egy ponton mennek át.

I-4. feladat

Keressük meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

- (i) n -nek legalább négy különböző pozitív osztója van;
- (ii) n -nek minden olyan a és b osztójára, melyre $1 < a < b < n$ teljesül, $b - a$ osztja n -et.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.

Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.

Minden feladat 8 pontot ér.

A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.