



4-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

INDIVIDUALIOSIOS VARŽYBOS
2010-09-11

Užduotis I-1.

Raskite visas tokias funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kad bet kuriems $x, y \in \mathbb{R}$ galioja lygybė

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

Užduotis I-2.

Ant lentos užrašyti visi teigiami natūraliojo skaičiaus N dalikliai. Du žaidėjai Ana ir Benas žaidžia tokį žaidimą. Žaidėjai ėjimus atlieka paeiliui. Pirmuoju ėjimu Ana nutrina skaičių N . Po ėjimo, kai vienas iš žaidėjų nutrina skaičių d , kitas žaidėjas savo ėjimu turi nutrinti arba skaičiaus d daliklį, arba skaičiaus d kartotinį. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Raskite visus tokius skaičius N , kad Ana gali laimėti nepriklausomai nuo Beno ėjimų.

Užduotis I-3.

Duotas keturkampis $ABCD$, apie kurį galima apibrėžti apskritimą. E yra toks įstrižainės AC taškas, kad $AD = AE$ ir $CB = CE$. M yra apskritimo k , apibrėžto apie trikampį BDE , centras. Apskritimas k kerta tiesę AC taškuose E ir F . Įrodykite, kad tiesės FM , AD ir BC kertasi viename taške.

Užduotis I-4.

Raskite visus natūraliuosius skaičius n , tenkinančius šias dvi sąlygas:

- (i) n turi mažiausiai keturis skirtingus teigiamus daliklius;
- (ii) jei a ir b yra bet kurie n dalikliai, tenkinantys nelygybes $1 < a < b < n$, tai n dalijasi iš skaičiaus $b - a$.

Laikas: 5 valandos

Laikas klausimams: 45 min

Kiekviena užduotis vertinama 8 taškais.

Užduočių pateikimo tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.