language: Slovak

4. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády

Súťaž jednotlivcov

11. september, 2010

Úloha I-1.

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Úloha I-2.

Na tabuli sú napísané všetky kladné delitele celého kladného čísla N. Dvaja hráči A a B hrajú nasledovnú hru, pričom sa pravidelne striedajú v ťahoch: V prvom ťahu hráč A zmaže číslo N. Ak posledné zmazané číslo je d, potom hráč, ktorý je na ťahu, zmaže deliteľa čísla d alebo násobok čísla d. Hráč, ktorý nemôže urobiť ťah, prehráva. Určte všetky čísla N, pre ktoré hráč A môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča B.

Úloha I-3.

Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$ a na jeho uhlopriečke AC bod Etaký, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nech M je stred kružnice k opísanej trojuholníku BDE. Kružnica k pretína priamku AC v bodoch E a F. Dokážte, že priamky FM, AD a BC sa pretínajú v jednom bode.

Úloha I-4.

Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré vyhovujú obom nasledujúcim podmienkam:

(i) číslo n má aspoň štyri kladné delitele;

(ii) ak a a b sú delitele čísla n, pre ktoré platí $1 < a < b < n$, potom číslo $b - a$ tiež delí n.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 45 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.