language: Slovene

EUROPEAN MIDDLE MATHEMATICAL FOURTH OLYMPIAD STREČNO SLOVAKIA 2010

4. srednjeevropska matematična olimpijada

Posamično tekmovanje
11. september 2010

Naloga I-1.
Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tako da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Naloga I-2.
Na tabli so napisani vsi pozitivni delitelji naravnega števila N. Igralca A in B igrata igro, pri kateri izmenično brišeta po eno število s table na naslednji način. V prvi potezi igralec A izbriše število N. Če je d zadnje izbrisano število, potem igralec na potezi izbriše bodisi nek delitelj števila d bodisi nek večkratnik števila d. Izgubi igralec, ki ne more narediti poteze. Določi vsa naravna števila N, za katera lahko A zmaga ne glede na to, kako igra B.

Naloga I-3.
Dana sta tetiven štirikotnik $ABCD$ in taka točka E na diagonali AC, da je $|AD| = |AE|$ in $|CB| = |CE|$. Naj bo M središče trikotniku BDE očrtane krožnice k. Krožnica k in premica AC se sekata v točkah E in F. Dokaži, da se premice FM, AD in BC sekajo v eni točki.

Naloga I-4.
Poišči vsa naravna števila n, za katera veljata naslednja pogoja:

(i) n ima vsaj štiri različne pozitivne delitelje;

(ii) za vsaka delitelja a in b števila n, za katera velja $1 < a < b < n$, tudi število $b - a$ deli n.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 45 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.