language: Hungarian

FOURTH MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
STREČNO
SLOVAKIA 2010

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

Csapatverseny
2010. szeptember 12.

T-1. feladat
Adott három, pozitív egészekből álló szigorúan monoton növő sorozat:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Minden pozitív egész pontosan egy sorozatban fordul elő. Tetszőleges pozitív egész n-re teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ páros.

Adjuk meg a_{2010}, b_{2010} és c_{2010} értékét.

T-2. feladat
Minden $n \geq 2$ egész számra határozzuk meg azt a legnagyobb C_n valós konstanst, melyre tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra fennáll, hogy

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

T-3. feladat
Egy szabályos n-szög minden csúcsában áll egy erőd. Adott pillanatban mindegyik erődből leadnak egy-egy lövést a két szomszédos erőd valamelyikére, el is találva azt. A *lövések eredményén* az eltalált erődök halmazát értjük; nem számít, hogy egy erődöt egy vagy két találat ért. Legyen $P(n)$ a lövések lehetséges eredményeinek a száma. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \geq 3$ egészre $P(k)$ és $P(k+1)$ relatív prímek.

T-4. feladat
Legyen n egy pozitív egész. Egy $ABCD$ négyzetet n^2 egységnégyzetre osztottunk fel. Minden egységnégyzetet a BD-vel párhuzamos átlójával két háromszögre bontunk. Néhányat az egységnégyzetek csúcsai közül pirosra színezünk olyan módon, hogy a $2n^2$ háromszög mindegyikének van legalább egy piros csúcsa. Adjuk meg a piros csúcsok minimális számát.

T-5. feladat
Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA és AB oldalakat rendre a D, E és F pontokban érinti. Legyen K a D pont tükörképe a beírt kör középpontjára. A DE és FK egyenesek metszéspontja S. Bizonyítsuk be, hogy AS és BC párhuzamosak.

T-6. feladat
Legyenek A, B, C, D, E olyan pontok, melyekre $ABCD$ húrnégyszög, $ABDE$ pedig paralelogramma. Az AC és BD átlók az S pontban metszik egymást, az AB és DC félegyenesek pedig az F pontban. Bizonyítsuk be, hogy $AFS\sphericalangle = ECD\sphericalangle$.

T-7. feladat
Egy nemnegatív egész n számra legyen az a_n pozitív egész tizes számrendszerbeli alakja

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_n/3$ mindig felírható két pozitív köbszám összegeként, de sohasem írható fel két négyzetszám összegeként.

T-8. feladat
Adott egy n pozitív egész szám, mely nem 2-hatvány. Mutassuk meg, hogy létezik olyan m pozitív egész szám, melyre teljesülnek a következők:

(i) m felírható két szomszédos pozitív egész szorzataként;

(ii) m tizes számrendszerbeli alakja két ugyanolyan, n számjegyet tartalmazó blokkból áll.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.