



4-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

KOMANDINĖS VARŽYBOS
2010-09-12

Užduotis T-1.

Duotos trys griežtai didėjančios natūraliųjų skaičių sekos:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots, \quad c_1, c_2, c_3, \dots$$

Kiekvienas natūralusis skaičius priklauso lygiai vienai iš šių trijų sekų. Kiekvienam natūraliajam n galioja šios sąlygos:

- (i) $c_{a_n} = b_n + 1$;
- (ii) $a_{n+1} > b_n$;
- (iii) skaičius $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ yra lyginis.

Raskite a_{2010} , b_{2010} ir c_{2010} .

Užduotis T-2.

Kiekvienam natūraliajam $n \geq 2$ raskite didžiausią galimą realiąją konstantą C_n , su kuria bet kokiems teigiamiesiems realiesiems skaičiams a_1, \dots, a_n galioja nelygė

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Užduotis T-3.

Kiekvienoje taisyklingojo n -kampio viršūnėje stovi gynybinis bokštas. Vienu metu iš kiekvieno bokšto buvo šauta ir taip kliudytas vienas iš dviejų artimiausių bokštų. *Susišaudymo rezultatas* yra kliudytų bokštų aibė; neskiriama, ar bokštas buvo kliudytas vieną ar du kartus. Visų įmanomų susišaudymo rezultatų skaičių pažymėkime $P(n)$. Įrodykite, kad kiekvienam sveikajam $k \geq 3$ skaičiai $P(k)$ ir $P(k+1)$ yra tarpusavyje pirminiai.

Užduotis T-4.

n yra natūralusis skaičius. Kvadratas $ABCD$ yra padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Savo ruožtu kiekvieną iš jų įstrižainė, lygiagreti BD , dalija į du trikampius. Kai kurios kvadratėlių viršūnės buvo nudažytos raudonai taip, kad kiekvieno iš $2n^2$ trikampių bent viena viršūnė tapo raudona. Kiek mažiausiai viršūnių galėjo būti nuspalvinta?

Užduotis T-5.

Apskritimas, įbrėžtas į trikampį ABC , liečia kraštines BC , CA ir AB atitinkamai taškuose D , E ir F . Taškai K ir D yra simetriški to apskritimo centro atžvilgiu. Tiesės DE ir FK kertasi taške S . Įrodykite, kad AS yra lygiagreti BC .

Užduotis T-6.

A, B, C, D, E yra tokie taškai, kad apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą, o $ABDE$ yra lygiagretainis. Įstrižainės AC ir BD kertasi taške S , o spinduliai AB ir DC – taške F . Įrodykite, kad $\angle AFS = \angle ECD$.

Užduotis T-7.

Kiekvienam neneigiamam sveikajam skaičiui n apibrėžkime a_n kaip natūralųjį skaičių, turintį dešimtainę išraišką

$$1 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 1.$$

Įrodykite, kad $a_n/3$ visada yra dviejų natūraliųjų skaičių kubų suma, bet niekada nėra dviejų pilnųjų kvadratų suma.

Užduotis T-8.

Duotas natūralusis skaičius n , kuris nėra dvejetainio laipsnis. Įrodykite, kad egzistuoja natūralusis skaičius m , pasižymintis šiomis dviem savybėmis:

- (i) m yra dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandauga;
- (ii) dešimtainę m išraišką sudaro du vienodi skaitmenų blokai, iš n skaitmenų kiekvienas.

Laikas: 5 valandos

Laikas klausimams: 45 min

Kiekviena užduotis vertinama 8 taškais.

Užduočių pateikimo tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.