language: Polish

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

ZAWODY DRUŻYNOWE
12 WRZEŚNIA 2010 R.

Zadanie T-1.
Dane są trzy ściśle rosnące ciągi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

liczb całkowitych dodatnich. Każda liczba całkowita dodatnia jest elementem dokładnie jednego z tych trzech ciągów. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n spełnione są następujące warunki:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) liczba $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ jest parzysta.

Wyznaczyć a_{2010}, b_{2010} i c_{2010}.

Zadanie T-2.
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, wyznaczyć największą możliwą wartość takiej stałej rzeczywistej C_n, że dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Zadanie T-3.
W każdym wierzchołku n-kąta foremnego umieszczono fortecę. W tym samym momencie każda z fortec strzela do jednej z dwóch sąsiednich i ją trafia. *Rezultatem bitwy* nazywamy zbiór trafionych fortec; nie rozróżniamy, czy forteca została trafiona raz, czy dwa razy. Niech $P(n)$ będzie liczbą możliwych rezultatów bitwy. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 3$, liczby $P(k)$ i $P(k+1)$ są względnie pierwsze.

Zadanie T-4.
Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Kwadrat $ABCD$ podzielono na n^2 kwadratów jednostkowych. Następnie każdy z nich podzielono na dwa trójkąty przy pomocy przekątnej równoległej do BD. Pewne wierzchołki kwadratów jednostkowych pokolorowano na czerwono w taki sposób, że każdy z $2n^2$ trójkątów posiada co najmniej jeden czerwony wierzchołek. Znaleźć najmniejszą możliwą liczbę czerwonych wierzchołków.

Zadanie T-5.
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Niech K będzie punktem symetrycznym do D względem środka tego okręgu. Proste DE i FK przecinają się w punkcie S. Udowodnić, że proste AS i BC są równoległe.

Zadanie T-6.
Niech A, B, C, D, E będą takimi punktami, że $ABCD$ jest czworokątem wpisanym w okrąg, natomiast $ABDE$ jest równoległobokiem. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S, natomiast półproste AB i DC w punkcie F. Udowodnić, że $\angle AFS = \angle ECD$.

Zadanie T-7.
Dla dowolnej liczby nieujemnej n liczba całkowita dodatnia a_n ma w układzie dziesiętnym reprezentację postaci

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Wykazać, że $a_n/3$ jest zawsze sumą dwóch sześcianów liczb całkowitych dodatnich, a nie jest nigdy sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie T-8.
Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią, nie będącą potęgą 2. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita m, która spełnia następujące dwa warunki:

(i) m jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich;

(ii) reprezentacja dziesiętna liczby m składa się z dwóch identycznych bloków po n cyfr.

Czas: 5 godzin.
Czas na zadawanie pytań: 45 min.
Za każde zadanie można uzyskać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.