



4. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády

SÚŤAŽ DRUŽSTIEV
12. SEPTEMBER, 2010

Úloha T-1.

Sú dané tri rastúce postupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots, \quad c_1, c_2, c_3, \dots$$

celých kladných čísel. Každé celé kladné číslo je členom práve jednej z týchto postupností. Pre každé celé kladné číslo n sú splnené podmienky:

- (i) $c_{a_n} = b_n + 1$;
- (ii) $a_{n+1} > b_n$;
- (iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je párne.

Nájdite a_{2010} , b_{2010} a c_{2010} .

Úloha T-2.

Pre každé celé číslo $n \geq 2$ určte najväčšie možné reálne číslo C_n také, že pre všetky kladné reálne čísla a_1, \dots, a_n platí

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Úloha T-3.

V každom vrchole pravidelného n -uholníka je veža. V tom istom okamihu každá veža vystrelí na jednu z dvoch susedných veží a zasiahne ju. *Výsledkom strelby* nazveme množinu všetkých zasiahnutých veží, pričom nerozlišujeme, či bola veža zasiahnutá raz alebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všetkých možných výsledkov strelby (pre dané n). Dokážte, že pre každé celé $k \geq 3$ sú čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesúdeliteľné.

Úloha T-4.

Nech n je celé kladné číslo. Štvorec $ABCD$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Každý z týchto štvorcov je ďalej rozdelený na dva trojuholníky uhlopriečkou rovnobežnou s úsečkou BD . Niektoré z vrcholov malých štvorcov sú zafarbené na červeno tak, že každý z $2n^2$ vytvorených trojuholníkov má aspoň jeden červený vrchol. Nájdite najmenší možný počet červených vrcholov.

Úloha T-5.

Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC , CA a AB postupne v bodoch D , E a F . Nech K je bod súmerný s bodom D podľa stredu vpísanej kružnice. Priamky DE a FK sa pretínajú v bode S . Dokážte, že priamka AS je rovnobežná s BC .

Úloha T-6.

Nech A , B , C , D , E sú také body, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník a $ABDE$ je rovnobežník. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode S a polpriamky AB a DC v bode F . Dokážte, že $|\angle AFS| = |\angle ECD|$.

Úloha T-7.

Pre celé nezáporné číslo n definujeme a_n ako číslo, ktorého dekadický zápis má tvar

$$1\underbrace{0\dots0}_n 2\underbrace{0\dots0}_n 2\underbrace{0\dots0}_n 1.$$

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.

Úloha T-8.

Je dané celé kladné číslo n , ktoré nie je mocninou čísla 2. Ukážte, že existuje celé kladné číslo m s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

- (i) m je súčinom dvoch po sebe idúcich celých kladných čísel;
- (ii) dekadický zápis čísla m pozostáva z dvoch identických blokov n číslic.

Čas na riešenie: 5 hodín

Čas na otázky: 45 minút

Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.

Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.