language: Slovene

4. srednjeevropska matematična olimpijada

Skupinsko tekmovanje
12. september 2010

Naloga T-1.
Dana so tri strogo naraščajoča zaporedja naravnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Vsako naravno število pripada natanko enemu od teh zaporedij. Poleg tega za vsako naravno število n velja:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) število $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je deljivo z 2.

Poišči a_{2010}, b_{2010} in c_{2010}.

Naloga T-2.
Za vsako naravno število $n \geq 2$ določi največjo realno konstanto C_n, tako da za poljubna pozitivna realna števila $a_1, \ldots, a_n$ velja

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Naloga T-3.
V vsakem oglišču pravilnega n-kotnika stoji utrdba. Istočasno iz vsake utrdbe streljajo na eno izmed obeh najbližjih utrdb in jo tudi zadenejo. *Rezultat bitke* je množica zadetih utrdb, pri čemer ne razlikujemo, ali je bila utrdba zadeta enkrat ali dvakrat. Naj bo $P(n)$ število vseh mogočih rezultatov bitke. Dokaži, da sta za vsako naravno število $k \geq 3$ števili $P(k)$ in $P(k+1)$ tuji.

Naloga T-4.
Naj bo n naravno število. Kvadrat $ABCD$ je razdeljen na n^2 enotskih kvadratov. Vsak izmed njih je z diagonalo, vzporedno BD, razdeljen na dva trikotnika. Nekatera oglišča enotskih kvadratov so pobarvana rdeče, tako da vsak od teh $2n^2$ trikotnikov vsebuje vsaj eno rdeče oglišče. Poišči najmanjše mogoče število rdečih oglišč.

Naloga T-5.
Trikotniku ABC včrtana krožnica se dotika stranic BC, CA in AB zaporedoma v točkah D, E in F. Naj bo K točka, ki je simetrična točki D glede na središče včrtane krožnice. Premici DE in FK se sekata v točki S. Dokaži, da sta premici AS in BC vzporedni.

Naloga T-6.
Dane so take točke A, B, C, D in E, da je $ABCD$ tetiven štirikotnik in $ABDE$ paralelogram. Diagonali AC in BD se sekata v S, poltraka AB in DC pa v F. Dokaži, da je $\angle AFS = \angle ECD$.

Naloga T-7.
Za nenegativno celo število n naj bo a_n naravno število z desetiškim zapisom

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokaži, da je $\frac{a_n}{3}$ vedno vsota dveh kubov naravnih števil, nikoli pa ni vsota dveh kvadratov celih števil.

Naloga T-8.
Dano je naravno število n, ki ni potenca števila 2. Dokaži, da obstaja naravno število m, za katero velja:

(i) m je produkt nekih dveh zaporednih naravnih števil;

(ii) desetiški zapis števila m je sestavljen iz dveh enakih blokov s po n števkami.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 45 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.