



## 4. srednjeevropska matematična olimpijada

SKUPINSKO TEKMOVANJE  
12. SEPTEMBER 2010

### Naloga T-1.

Dana so tri strogo naraščajoča zaporedja naravnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots, \quad c_1, c_2, c_3, \dots$$

Vsako naravno število pripada natanko enemu od teh zaporedij. Poleg tega za vsako naravno število  $n$  velja:

- (i)  $c_{a_n} = b_n + 1$ ;
- (ii)  $a_{n+1} > b_n$ ;
- (iii) število  $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$  je deljivo z 2.

Poišči  $a_{2010}$ ,  $b_{2010}$  in  $c_{2010}$ .

### Naloga T-2.

Za vsako naravno število  $n \geq 2$  določi največjo realno konstanto  $C_n$ , tako da za poljubna pozitivna realna števila  $a_1, \dots, a_n$  velja

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

### Naloga T-3.

V vsakem oglišču pravičnega  $n$ -kotnika stoji utrdba. Istočasno iz vsake utrdbe streljajo na eno izmed obeh najbližjih utrdb in jo tudi zadenejo. *Rezultat bitke* je množica zadetih utrdb, pri čemer ne razlikujemo, ali je bila utrdba zadeta enkrat ali dvakrat. Naj bo  $P(n)$  število vseh mogočih rezultatov bitke. Dokaži, da sta za vsako naravno število  $k \geq 3$  števili  $P(k)$  in  $P(k+1)$  tuji.

### Naloga T-4.

Naj bo  $n$  naravno število. Kvadrat  $ABCD$  je razdeljen na  $n^2$  enotskih kvadratov. Vsak izmed njih je z diagonalo, vzporedno  $BD$ , razdeljen na dva trikotnika. Nekatera oglišča enotskih kvadratov so pobarvana rdeče, tako da vsak od teh  $2n^2$  trikotnikov vsebuje vsaj eno rdeče oglišče. Poišči najmanjše mogoče število rdečih oglišč.

**Naloga T-5.**

Trikotniku  $ABC$  včrtana krožnica se dotika stranic  $BC$ ,  $CA$  in  $AB$  zaporedoma v točkah  $D$ ,  $E$  in  $F$ . Naj bo  $K$  točka, ki je simetrična točki  $D$  glede na središče včrtane krožnice. Premici  $DE$  in  $FK$  se sekata v točki  $S$ . Dokaži, da sta premici  $AS$  in  $BC$  vzporedni.

**Naloga T-6.**

Dane so take točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  in  $E$ , da je  $ABCD$  tetiven štirikotnik in  $ABDE$  paralelogram. Diagonali  $AC$  in  $BD$  se sekata v  $S$ , poltraka  $AB$  in  $DC$  pa v  $F$ . Dokaži, da je  $\angle AFS = \angle ECD$ .

**Naloga T-7.**

Za nenegativno celo število  $n$  naj bo  $a_n$  naravno število z desetiškim zapisom

$$1 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 1.$$

Dokaži, da je  $\frac{a_n}{3}$  vedno vsota dveh kubov naravnih števil, nikoli pa ni vsota dveh kvadratov celih števil.

**Naloga T-8.**

Dano je naravno število  $n$ , ki ni potenca števila 2. Dokaži, da obstaja naravno število  $m$ , za katero velja:

- (i)  $m$  je produkt nekih dveh zaporednih naravnih števil;
- (ii) desetiški zapis števila  $m$  je sestavljen iz dveh enakih blokov s po  $n$  števki.

Čas: 5 ur

Čas za vprašanja: 45 min

Vsaka naloga je vredna 8 točk.

Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.