language: Polish

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

Zawody Indywidualne

11 września 2010 r.

Zadanie I-1.
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Zadanie I-2.
Na tablicy wypisano wszystkie dodatnie dzielniki liczby całkowitej dodatniej N. Dwaj gracze A i B grają, wykonując naprzemiennie ruchy, w poniżej opisaną grę. W pierwszym ruchu gracz A wymazuje liczbę N. Jeśli ostatnią wymazaną liczbą jest d, to następny z graczy musi wymazać albo dzielnik d albo wielokrotność d. Gracz, który nie może wykonać ruchu – przegrywa. Wyznaczyć wszystkie takie liczby N, dla których gracz A może wygrać niezależnie od strategii gracza B.

Zadanie I-3.
Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg oraz punkt E leżący na przekątnej AC taki, że $AD = AE$ i $CB = CE$. Niech M będzie środkiem okręgu k opisanego na trójkącie BDE. Okrąg k przecina prostą AC w punktach E i F. Udowodnić, że proste FM, AD i BC przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie I-4.
Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, które spełniają następujące dwa warunki:

(i) n ma co najmniej cztery różne dzielniki dodatnie;

(ii) dla dowolnych dzielników a i b liczby n spełniających nierówność $1 < a < b < n$, liczba $b - a$ dzieli n.

Czas: 5 godzin.
Czas na zadawanie pytań: 45 min.
Za każde zadanie można uzyskać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.