language: Croatian

4. Srednjoeuropska matematička olimpijada

EKIPNO NATJECANJE
12. RUJNA 2010.

Zadatak T-1.
Dana su tri strogo rastuća niza prirodnih brojeva:

$$a_1, a_2, a_3, \dots\ , \qquad b_1, b_2, b_3, \dots\ , \qquad c_1, c_2, c_3, \dots\ .$$

Svaki prirodni broj pripada točno jednom od tih triju nizova.
Uz to, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeći uvjeti:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) broj $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je paran.

Odredite a_{2010}, b_{2010} i c_{2010}.

Zadatak T-2.
Za svaki prirodni broj $n \geq 2$, odredite najveću realnu konstantu C_n takvu da za sve pozitivne realne brojeve $a_1, \dots, a_n$ vrijedi

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Zadatak T-3.
U svakom vrhu pravilnog n-terokuta nalazi se po jedna tvrđava. U istom trenutku svaka tvrđava gađa i pogađa jednu od dvije njoj najbliže tvrđave. *Rezultat bitke* je skup svih pogođenih tvrđava pri čemu ne razlikujemo je li tvrđava pogođena jednom ili dvaput. Neka je $P(n)$ broj mogućih rezultata bitke. Dokažite da su za svaki prirodni broj $k \geq 3$ brojevi $P(k)$ i $P(k+1)$ relativno prosti.

Zadatak T-4.
Neka je n prirodni broj. Kvadrat $ABCD$ podijeljen je na n^2 jediničnih kvadrata. Svaki od njih je podijeljen na dva trokuta, dijagonalom paralelnom s BD. Neki od vrhova jediničnih kvadrata obojani su crvenom bojom tako da svaki od $2n^2$ trokuta sadrži barem jedan crveni vrh. Odredite najmanji mogući broj crvenih vrhova.

Zadatak T-5.
Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama D, E i F redom. Neka je K točka simetrična točki D s obzirom na središte upisane kružnice. Pravci DE i FK sijeku se u točki S. Dokažite da su pravci AS i BC paralelni.

Zadatak T-6.
Neka su A, B, C, D, E točke takve da je $ABCD$ tetivni četverokut, a $ABDE$ paralelogram. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S, a polupravci AB i DC u točki F. Dokažite da je $\sphericalangle AFS = \sphericalangle ECD$.

Zadatak T-7.
Za nenegativni cijeli broj n, neka je a_n prirodni broj čiji je dekadski prikaz

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokažite da je $\frac{1}{3}a_n$ uvijek suma dvaju kubova prirodnih brojeva, ali nikad nije suma dvaju kvadrata cijelih brojeva.

Zadatak T-8.
Dan je prirodni broj n koji nije potencija broja 2. Dokažite da postoji prirodni broj m koji ima sljedeća dva svojstva:

(i) m je umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva;

(ii) dekadski prikaz broja m sastoji se od dvaju jednakih blokova od n znamenki.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za postavljanje pitanja: 45 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.