language: Lithuanian

4-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

Komandinės varžybos
2010-09-12

Užduotis T-1.
Duotos trys griežtai didėjančios natūraliųjų skaičių sekos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Kiekvienas natūralusis skaičius priklauso lygiai vienai iš šių trijų sekų. Kiekvienam natūraliajam n galioja šios sąlygos:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) skaičius $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ yra lyginis.

Raskite a_{2010}, b_{2010} ir c_{2010}.

Užduotis T-2.
Kiekvienam natūraliajam $n \geq 2$ raskite didžiausią galimą realiąją konstantą C_n, su kuria bet kokiems teigiamiems realiesiems skaičiams a_1, ..., a_n galioja nelygybė

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Užduotis T-3.
Kiekvienoje taisyklingojo n-kampio viršūnėje stovi gynybinis bokštas. Vienu metu iš kiekvieno bokšto buvo šauta ir taip kliudytas vienas iš dviejų artimiausių bokštų. *Susišaudymo rezultatas* yra kliudytų bokštų aibė; neskiriama, ar bokštas buvo kliudytas vieną ar du kartus. Visų įmanomų susišaudymo rezultatų skaičių pažymėkime $P(n)$. Įrodykite, kad kiekvienam sveikajam $k \geq 3$ skaičiai $P(k)$ ir $P(k+1)$ yra tarpusavyje pirminiai.

Užduotis T-4.
n yra natūralusis skaičius. Kvadratas $ABCD$ yra padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Savo ruožtu kiekvieną iš jų įstrižainė, lygiagreti BD, dalija į du trikmapius. Kai kurios kvadratėlių viršūnės buvo nudažytos raudonai taip, kad kiekvieno iš $2n^2$ trikampių bent viena viršūnė tapo raudona. Kiek mažiausiai viršūnių galėjo būti nuspalvinta?

Užduotis T-5.
Apskritimas, įbrėžtas į trikampį ABC, liečia kraštines BC, CA ir AB atitinkamai taškuose D, E ir F. Taškai K ir D yra simetriški to apskritimo centro atžvilgiu. Tiesės DE ir FK kertasi taške S. Įrodykite, kad AS yra lygiagreti BC.

Užduotis T-6.
A, B, C, D, E yra tokie taškai, kad apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą, o $ABDE$ yra lygiagretainis. Įstrižainės AC ir BD kertasi taške S, o spinduliai AB ir DC – taške F. Įrodykite, kad $\angle AFS = \angle ECD$.

Užduotis T-7.
Kiekvienam neneigiamam sveikajam skaičiui n apibrėžkime a_n kaip natūralųjį skaičių, turintį dešimtainę išraišką

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Įrodykite, kad $a_n/3$ visada yra dviejų natūraliųjų skaičių kubų suma, bet niekada nėra dviejų pilnųjų kvadratų suma.

Užduotis T-8.
Duotas natūralusis skaičius n, kuris nėra dvejeto laipsnis. Įrodykite, kad egzistuoja natūralusis skaičius m, pasižymintis šiomis dviem savybėmis:

(i) m yra dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandauga;

(ii) dešimtainę m išraišką sudaro du vienodi skaitmenų blokai, iš n skaitmenų kiekvienas.

Laikas: 5 valandos
Laikas klausimams: 45 min
Kiekviena užduotis vertinama 8 taškais.
Užduočių pateikimo tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.