language: Slovak

4. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády

Súťaž družstiev

12. september, 2010

Úloha T-1.
Sú dané tri rastúce postupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

celých kladných čísel. Každé celé kladné číslo je členom práve jednej z týchto postupností. Pre každé celé kladné číslo n sú splnené podmienky:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je párne.

Nájdite a_{2010}, b_{2010} a c_{2010}.

Úloha T-2.
Pre každé celé číslo $n \geq 2$ určte najväčšie možné reálne číslo C_n také, že pre všetky kladné reálne čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Úloha T-3.
V každom vrchole pravidelného n-uholníka je veža. V tom istom okamihu každá veža vystrelí na jednu z dvoch susedných veží a zasiahne ju. *Výsledkom streľby* nazveme množinu všetkých zasiahnutých veží, pričom nerozlišujeme, či bola veža zasiahnutá raz alebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všetkých možných výsledkov streľby (pre dané n). Dokážte, že pre každé celé $k \geq 3$ sú čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesúdeliteľné.

Úloha T-4.
Nech n je celé kladné číslo. Štvorec $ABCD$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Každý z týchto štvorcov je ďalej rozdelený na dva trojuholníky uhlopriečkou rovnobežnou s úsečkou BD. Niektoré z vrcholov malých štvorcov sú zafarbené na červeno tak, že každý z $2n^2$ vytvorených trojuholníkov má aspoň jeden červený vrchol. Nájdite najmenší možný počet červených vrcholov.

Úloha T-5.
Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Nech K je bod súmerný s bodom D podľa stredu vpísanej kružnice. Priamky DE a FK sa pretínajú v bode S. Dokážte, že priamka AS je rovnobežná s BC.

Úloha T-6.
Nech A, B, C, D, E sú také body, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník a $ABDE$ je rovnobežník. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode S a polpriamky AB a DC v bode F. Dokážte, že $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle ECD|$.

Úloha T-7.
Pre celé nezáporné číslo n definujme a_n ako číslo, ktorého dekadický zápis má tvar

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.

Úloha T-8.
Je dané celé kladné číslo n, ktoré nie je mocninou čísla 2. Ukážte, že existuje celé kladné číslo m s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

(i) m je súčinom dvoch po sebe idúcich celých kladných čísel;

(ii) dekadický zápis čísla m pozostáva z dvoch identických blokov n číslic.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 45 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.