language: Czech

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

SOUTĚŽ JEDNOTLIVCŮ
11. ZÁŘÍ 2010

Úloha I-1.
Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Úloha I-2.
Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla N. Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají na tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N. Bylo-li naposled smazáno číslo d, v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N, pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B.

Úloha I-3.
Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a bod E na jeho úhlopříčce AC takový, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nechť M je středem kružnice k opsané trojúhelníku BDE. Kružnice k protíná přímku AC v bodech E a F. Dokažte, že přímky FM, AD a BC procházejí týmž bodem.

Úloha I-4.
Nalezněte všechna kladná celá čísla n, která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:

(i) číslo n má alespoň čtyři různé kladné dělitele,

(ii) pro libovolné dva dělitele a, b čísla n takové, že $1 < a < b < n$, dělí jejich rozdíl $b - a$ číslo n.

Čas: 5 hodin.
Čas na dotazy: 45 min.
Za každou úlohu lze získat 8 bodů.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.