language: French

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

Compétition Individuelle

11 Septembre, 2010

Problème I-1.
Trouvez toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Problème I-2.
Tous les diviseurs positifs d'un entier positif N sont écrits sur un tableau noir. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant jouant un coup chacun leur tour. Lors du premier coup, le joueur A efface N. Si le nombre qui vient d'être effacé est d, le joueur suivant peut effacer soit un diviseur, soit un multiple de d. Le joueur qui ne peut plus effacer de nombre, perd la partie. Déterminez tous les nombres N pour lesquels A peut gagner, indépendamment des coups joués par B.

Problème I-3.
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit et E un point sur la diagonale AC tel que $\overline{AD} = \overline{AE}$ et $\overline{CB} = \overline{CE}$. Soit M le centre du cercle k, circoncrisant le triangle BDE. Le cercle k coupe le segment AC en E et F. Prouvez que les segments FM, AD, et BC se coupent en un même point.

Problème I-4.
Trouvez tous les entiers positifs n qui satisfont les deux conditions suivantes:

(i) n possède au moins quatres différents diviseurs positifs;

(ii) pour n'importe quels diviseurs a et b de n qui satisfont $1 < a < b < n$, le nombre $b - a$ divise n.

Temps: 5 heures
Temps pour poser des questions: 45 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes n'est pas représentatif de leurs difficulté.