language: Lithuanian

4-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

INDIVIDUALIOSIOS VARŽYBOS
2010-09-11

Užduotis I-1.
Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad bet kuriems $x, y \in \mathbb{R}$ galioja lygybė

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Užduotis I-2.
Ant lentos užrašyti visi teigiami natūraliojo skaičiaus N dalikliai. Du žaidėjai Ana ir Benas žaidžia tokį žaidimą. Žaidėjai ėjimus atlieka paeiliui. Pirmuoju ėjimu Ana nutrina skaičių N. Po ėjimo, kai vienas iš žaidėjų nutrina skaičių d, kitas žaidėjas savo ėjimu turi nutrinti arba skaičiaus d daliklį, arba skaičiaus d kartotinį. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Raskite visus tokius skaičius N, kad Ana gali laimėti nepriklausomai nuo Beno ėjimų.

Užduotis I-3.
Duotas keturkampis $ABCD$, apie kurį galima apibrėžti apskritimą. E yra toks įstrižainės AC taškas, kad $AD = AE$ ir $CB = CE$. M yra apskritimo k, apibrėžto apie trikampį BDE, centras. Apskritimas k kerta tiesę AC taškuose E ir F. Įrodykite, kad tiesės FM, AD ir BC kertasi viename taške.

Užduotis I-4.
Raskite visus natūraliuosius skaičius n, tenkinančius šias dvi sąlygas:

(i) n turi mažiausiai keturis skirtingus teigiamus daliklius;

(ii) jei a ir b yra bet kurie n dalikliai, tenkinantys nelygybes $1 < a < b < n$, tai n dalijasi iš skaičiaus $b - a$.

Laikas: 5 valandos
Laikas klausimams: 45 min
Kiekviena užduotis vertinama 8 taškais.
Užduočių pateikimo tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.