language: Czech

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

SOUTĚŽ DRUŽSTEV
12. ZÁŘÍ 2010

Úloha T-1.
Jsou dány tři rostoucí posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

kladných celých čísel. Každé kladné celé číslo je členem právě jedné z těchto tří posloupností. Dále pro každé kladné celé číslo n platí:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$,

(ii) $a_{n+1} > b_n$,

(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je dělitelné dvěma.

Určete čísla a_{2010}, b_{2010} a c_{2010}.

Úloha T-2.
Pro každé celé číslo $n \geq 2$ určete největší reálnou konstantu C_n takovou, že pro všechna kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Úloha T-3.
V každém vrcholu pravidelného n-úhelníku stojí pevnost. Ve stejný okamžik každá pevnost vystřelí na jednu ze dvou nejbližších pevností a zasáhne ji. *Výsledkem střelby* rozumíme množinu zasažených pevností, přičemž nerozlišujeme, zda pevnost byla zasažena jednou nebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všech možných výsledků střelby. Ukažte, že pro všechna celá čísla $k \geq 3$ jsou čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesoudělná.

Úloha T-4.
Nechť n je kladné celé číslo. Čtverec $ABCD$ je rozdělen na n^2 jednotkových čtverců. Každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou rovnoběžnou s BD na dva trojúhelníky. Některé z vrcholů jednotkových čtverců jsou obarveny červeně tak, že každý z $2n^2$ získaných trojúhelníků má alespoň jeden vrchol červený. Určete nejmenší možný počet červených vrcholů takového obarvení.

Úloha T-5.
Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť bod K je souměrně sdružený s bodem D podle středu kružnice vepsané a přímky DE, FK se protínají v bodě S. Dokažte, že přímky AS a BC jsou rovnoběžné.

Úloha T-6.
Jsou dány body A, B, C, D, E tak, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník. Dále se úhlopříčky AC, BD protínají v bodě S a polopřímky AB, DC v bodě F. Dokažte, že $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle ECD|$.

Úloha T-7.
Nechť n je nezáporné celé číslo. Označme a_n číslo s desítkovým zápisem

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Ukažte, že $a_n/3$ lze vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin kladných celých čísel ale nikoliv jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Úloha T-8.
Je dáno kladné celé číslo n, které není celou mocninou čísla 2. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m s následujícími dvěma vlastnostmi:

(i) číslo m je součinem dvou po sobě jdoucích kladných celých čísel,

(ii) desítkový zápis čísla m je tvořen dvěma shodnými bloky n číslic.

Čas: 5 hodin.
Čas na dotazy: 45 min.
Za každou úlohu lze získat 8 bodů.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.