language: French

4^{th} Middle European Mathematical Olympiad

Compétition par équipe

12 Septembre 2010

Problème T-1.
Trois suites strictement croissantes

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

d'entiers positifs sont données. Chaque entier positif appartient à exactement une des trois suites. Pour chaque entier positif n, les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(ii) $a_{n+1} > b_n$;

(iii) le nombre $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ est divisible par 2.

Trouvez a_{2010}, b_{2010}, et c_{2010}.

Problème T-2.
Déterminez pour chaque entier $n \geq 2$ la plus grande constante C_n, tel que pour tous les nombres réels positifs $a_1, \ldots, a_n$, nous avons

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Problème T-3.
Il y a une forteresse dans chaque coin d'un polygône régulier à n côtés. Au même moment, chaque forteresse tire et touche une des deux forteresses les plus proches. Le *résultat du tir* est défini comme l'ensemble des forteresses touchées. Nous ne distinguons pas si une forteresse a été touchée une ou deux fois. Soit $P(n)$ le nombre de résultat possibles du tir. Prouvez que pour chaque entier positif $k \geq 3$, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont premiers entre eux.

Problème T-4.
Soit n un entier positif. Un carré $ABCD$ est partagé en n^2 carrés unitaires. Chaque carré unitaire est divisé en deux triangles par sa diagonale parallèle à BD. Certains coins des carrés unitaires sont coloriés en rouge de tel manière que chacun des $2n^2$ triangles contient au moins un coin rouge. Trouvez le plus petit nombre de coins rouges.

Problème T-5.
Le cercle inscrit du triangle ABC touche les côtés BC, CA, et AB respectivement en D, E, et F. Soit K le point simétrique à D par apport au centre du cercle. Les segments DE et FK se coupent en S. Prouvez que AS est parallèle à BC.

Problème T-6.
Soit A, B, C, D, E cinq points tel que $ABCD$ est un quadrilatère inscrit et $ABDE$ un paralélogramme. Les diagonales AC et BD se coupent en S et les demi-droite AB et DC en F. Prouvez que $\angle AFS = \angle ECD$.

Problème T-7.
Pour un entier non négatif n, a_n est défini comme un entier positif avec la représentation décimale suivante

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Prouvez que $a_n/3$ est toujours la somme de deux cubes positifs et parfaits, mais jamais la somme de deux carrés parfaits.

Problème T-8.
Soit n un entier positif, qui n'est pas une puissance de 2. Prouvez qu'il existe un entier positif m ayant les propriétés suivantes:

(i) m est le produit de deux entiers positifs successifs;

(ii) la représentation décimale de m est composée des deux blocs identiques de n chiffres.

Temps: 5 heures
Temps pour poser des questions: 45 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes n'est pas représentatif de leurs difficulté.