language: German

FOURTH MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
STREČNO
SLOVAKIA 2010

4. Mitteleuropäische Mathematikolympiade

Mannschaftswettbewerb
12. September 2010

Aufgabe T-1.
Gegeben seien drei streng monoton wachsende Folgen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

positiver ganzer Zahlen. Jede positive ganze Zahl ist in genau einer dieser drei Folgen enthalten. Für jede positive ganze Zahl n gelten die folgenden Bedingungen:

(a) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(b) $a_{n+1} > b_n$;

(c) Die Zahl $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ ist gerade.

Man bestimme a_{2010}, b_{2010} und c_{2010}.

Aufgabe T-2.
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ bestimme man die größte reelle Konstante C_n, sodass für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2 .$$

Aufgabe T-3.
In jeder Ecke eines regelmäßigen n-Ecks steht eine Burg. Im gleichen Moment schießt jede Burg auf eine der beiden nächstgelegenen Burgen (und trifft). Das *Ergebnis des Schießens* ist die Menge der getroffenen Burgen. Wir unterscheiden nicht, ob eine Burg ein oder zwei Mal getroffen wurde. Sei $P(n)$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse des Schießens.
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl $k \geq 3$ die Zahlen $P(k)$ und $P(k+1)$ teilerfremd sind.

Aufgabe T-4.
Sei n eine positive ganze Zahl. Ein Quadrat $ABCD$ ist unterteilt in n^2 Einheitsquadrate. Jedes davon wird von der Diagonalen parallel zu BD in zwei Dreiecke zerlegt. Einige der Ecken der Einheitsquadrate werden rot gefärbt, sodass jedes der $2n^2$ Dreiecke mindestens einen roten Eckpunkt hat.
Man bestimme, wie viele rote Eckpunkte mindestens benötigt werden.

Aufgabe T-5.
Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Sei K der zu D bezüglich des Inkreismittelpunktes symmetrische Punkt. Die Geraden DE und FK schneiden einander in S.
Man zeige, dass AS parallel zu BC ist.

Aufgabe T-6.
Seien A, B, C, D, E Punkte, sodass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist und $ABDE$ ein Parallelogramm. Die Diagonalen AC und BD schneiden einander in S, und die Strahlen AB und DC schneiden einander in F.
Man zeige, dass $\sphericalangle AFS = \sphericalangle ECD$.

Aufgabe T-7.
Für eine nichtnegative ganze Zahl n sei a_n die positive ganze Zahl mit der Dezimaldarstellung

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1\,.$$

Man zeige, dass $\frac{a_n}{3}$ immer Summe zweier positiver Kubikzahlen, aber nie Summe zweier Quadratzahlen ist.

Aufgabe T-8.
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n, die keine Zweierpotenz ist. Man zeige, dass eine positive ganze Zahl m existiert, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(a) m ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen.

(b) Die Dezimaldarstellung der Zahl m besteht aus zwei identischen Ziffernblöcken zu je n Ziffern.

Arbeitszeit: 5 Stunden
Fragezeit: 45 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von ihrem Schwierigkeitsgrad ab.